Mechanik Zusammenfassung

Verfasst von Franz Ludwig Kostelezky - auf Grundlage der von Professor Ambacher gehaltenen Vorlesung (Experimentalphysik) im Wintersemester 2018 (Albert-Ludwigs-Universität Freiburg) und unter Verwendung der betreffenden Vorlesungsfolien.

MECHANIK IN EINER DIMENSION 4

Massekörper 4

Geschwindigkeit 4
Durchschnittsgeschwindigkeit 4
Momentangeschwindigkeit 4

Beschleunigung 5

Orte – Geschwindigkeiten – Beschleunigungen 5

Kraft 5

STÖßE IN EINER DIMENSION 5

Impuls 5

Impulserhaltung 5

Kinetische Energie 5

Plastischer Stoß 6

Elastische und inelastische Stöße 6

Potentielle Energie 6

Inertialsysteme 6

Trägheitsgesetz – 1. Newtonsches Gesetz 6

Aktionsprinzip – 2. Newtonsches Gesetz 6

Wechselwirkungsprinzip – 3. Newtonsches Gesetz 6

Arbeit 7
Hubarbeit 7
Beschleunigungsarbeit 7
Schiefe Ebene 7

Mechanische Leistung 7

MECHANIK IN DREI DIMENSIONEN 8

Geschwindigkeitsvektor 8

Beschleunigungsvektor **8**

Winkelgeschwindigkeit **8**

Tangentenvektor **10**

GRAVITATION 10

Fliehkraft **11**

Beschleunigung durch Gravitation **11**

Feldvektor **11**

Konservative Kraft – konservatives Vektorfeld **11**

Potentielle Energie eines Gravitationsfeldes **11**

Gravitationsfeld einer Kugel **11**

Schwarze Löcher **12**

Impulserhaltung im dreidimensionalen Raum **12**

Ebene Stöße bei ungleichen Massen **12**

KLASSISCHE RELATIVITÄT 12

Relativitätsprinzip **12**

Galilei Transformation **12**

Beschleunigte Bezugssysteme **13**

Corioliskraft **13**

Bahngeschwindigkeit **13**

Drehimpuls **13**

SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE 13

Dopplereffekt **13**

Wellenlänge **13**

Zeitdilatation **14**

Gleichzeitigkeit **14**

Minkowski Diagramm **14**
Achsenskalierung 14

Lorentz-Transformation **15**

Relativistische Massezunahme 15

Relativistische Energie 15

Relativistischer Dopplereffekt 16

MECHANIK STARRER KÖRPER 16

Starrer Körper 16

Kräftepaare am starren Körper 16

Starrer Rotator 16

Trägheitsmoment 17

Steinersche Satz 17

Drehmoment 17

Kreisel 17

MECHANIK DEFORMIERBARER KÖRPER 18

Poissonzahl 18

Stress and Strain 18

Das Youngsche Modul 18

Formen der eindimensionalen Dehnung 18

Hooksche Gesetz 18

Potentielle Energie in einer Feder 19

Freiheitsgrade einer allgemeinen dreidimensionalen Beschreibung 19
Rechnen mit Tensoren 19

Kompressionsmodul 19

Schubmodul und Schubspannung 20

Schubmodul bei Torsionsspannung 20

Biegung eines einseitig eingespannten Balkens 20

MECHANIK DER FLÜSSIGKEITEN UND GASE 20

Flüssigkeit 20

Gas 20
Ideales Gas 20
Gasgesetze 21

Allgemeine Gasgleichung **21**

Reales Gas **21**
Van-der-Vaals-Gleichung 21

Gasprozesse **22**
Isochor: p/T konstant 22
Isobar: V/T konstant 22
Isotherm: pV konstant 22

Kompression von Gas **22**

ERSTER HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK 23

Mechanik in einer Dimension

Massekörper

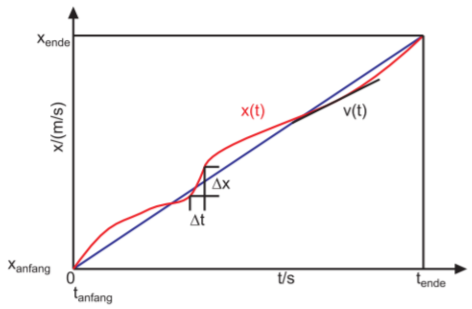
Ein Massekörper ist ein idealisierter Körper, der seine gesamte Masse in einem exakt bestimmbaren Punkt x vereinigt.

Einige Beispiele für Objekte, die sich als Massepunkt darstellen lassen: Planeten, Fußball, Auto, Elektronen

Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit ist eine Beschreibung der Änderung des Ortes in Abhängigkeit der Zeit eines Körpers/Massepunktes.

Die Geschwindigkeit v wird durch Betrag und Bewegungsrichtung – also vektoriell – angegeben. Ihre Einheit ist $\frac{m}{s}$. Oft wird für eine Bewegung eine Funktion von Ort und Zeit angegeben:



x(t): Ortsfunktion
v(t): Momentangeschwindigkeit

Durchschnittsgeschwindigkeit

Die Durchschnittsgeschwindigkeit lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$V_{Durchschnitt} = \frac{\left(x(t(ende)) - x(t(anfang))\right)}{t(ende) - t(anfang)}$$

Diese Definition gilt nur bei der Bewegung auf einer Geraden – eine allgemein gültige Formel ist die „Autofahrerdefinition":

$$V_{Durchschnitt} = \frac{1}{T}\int_{t(anfang)}^{t(ende)} |v(t)|\, dt$$

Momentangeschwindigkeit

Die Momentangeschwindigkeit ist die Tangente am Punkt t der Ortsfunktion:

$$v(t) = \lim_{\mathrm{dt} \to 0} \frac{x(t + dt) - x(t)}{\mathrm{dt}} = x'(t)$$

Beschleunigung

Die Beschleunigung ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit:

$$a(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{v(t + dt) - v(t)}{dt} = v'(t)$$

Die Einheit der Beschleunigung ist $\frac{m}{s^2}$.

Orte – Geschwindigkeiten – Beschleunigungen

Es sind folgende Beziehungen zwischen den Größen zu sehen – bei konstanter Bewegung:

$$a(t) = v'(t) = x''(t)$$

$$v(t) = v(0) + a * t = x'(t)$$

$$x(t) = x(0) + v * t$$

Allgemein – auch bei beschleunigter Bewegung:

$$v(t) = v(0) \int a(t)\, dt$$

$$x(t) = x(0) \int v(t)\, dt$$

Kraft

Die Kraft F ist eine Einwirkung, die Körper verformen und bewegliche Körper beschleunigen können. Kräfte sind erforderlich um Arbeit zu verrichten wobei sich die Energie eines Körpers/physikalischen Systems ändert. Die Kraft ist vektoriell, ihre Einheit ist $\frac{kg\, m}{s^2} = N$. Sie lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$F = m * a = p'$$

Dabei ist die Kraft die zeitliche Änderung des Impulses. Sei F = 0, so ist der Impuls konstant.

Stöße in einer Dimension

Impuls

Der Impuls p ist die Charakterisierung der Translationsbewegung des Massemittelpunktes:

$$p = m * v$$

Die Einheit des Impulses ist $\frac{kg\, m}{s}$.

Impulserhaltung

Der Gesamtimpuls in einem physikalisch abgeschlossenen System bleibt konstant.

Kinetische Energie

Die kinetische Energie E_{kin} ist die Energie, die ein Objekt aufgrund seiner Bewegung erhält. Sie hängt von der Masse und der Geschwindigkeit des Objektes ab und entspricht der Arbeit, die aufgewendet werden muss um das Objekt aus der Ruhelage in die momentane Bewegung zu versetzen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m * v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Die Einheit der kinetischen Energie ist $\frac{kg\ m^2}{s^2} = J = N * m.$

Es gilt die Energieerhaltung.

Plastischer Stoß

Ein Stoß zwischen zwei Körpern ist plastisch, wenn beide Körper nach dem Stoß aneinander „kleben“, und sich zu einem Körper vereinigt haben:

$$m_1 + m_2 = m$$

$$v'_2 = v'_1 = v$$

So folgt:

$$\frac{p_1}{m_1} = \frac{p'_2}{m_2}$$

$$p_1 + p_2 = p$$

Elastische und inelastische Stöße

Bei elastischen Stößen gilt sowohl der Energieerhaltungssatz als auch der Impulserhaltungssatz. Ein Beispiel dafür ist der Stoß zwischen Billiardkugeln.

Bei inelastischen Stößen gilt der Impulserhaltungssatz, jedoch der Energieerhaltungssatz <u>nicht</u>. Ein Beispiel für einen solchen Stoß ist ein Autounfall.

Potentielle Energie

Die potentielle Energie E_{pot} ist die Möglichkeit Arbeit zu leisten:

$$E = \int_{s1}^{s2} F\, ds = m * g * h$$

Inertialsysteme

Inertialsysteme sind Koordinatensysteme, in denen sich jeder kräftefreie Massepunkt geradlinig gleichförmig bewegt oder ruht.

Vgl. Vorlesungsfolie 2.7 „Relative Geschwindigkeit“

Trägheitsgesetz – 1. Newtonsches Gesetz

In einem Inertialsystem (von einem Standpunkt aus) bleibt jeder Körper in Ruhe oder im Zustand geradlinig gleichförmiger Bewegung, auf den keine Kraft wirkt. Jedes Bezugssystem, das sich geradlinig gleichförmig zu einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem:

- Galilei Transformation
- Ugs.: „Inertialsystem: Ein anderer Standpunkt“

Aktionsprinzip – 2. Newtonsches Gesetz

Das Aktionsprinzip sagt aus, dass die Kraft F die Ableitung des Impulses p ist: $F = p' = m * a.$

Wechselwirkungsprinzip – 3. Newtonsches Gesetz

„actio = reactio“: Üben zwei Teilchen Kräfte aneinander aus, so sind diese gleich groß und entgegengesetzt der Verbindungslinie der Teilchen:

$$F_A = F_B$$

$$0 = F_A + F_B$$

Arbeit

Die Arbeit ist die aufgewendete Kraft pro Strecke, beispielsweise um einen Klotz um die Strecke s zu bewegen – bei konstanter Bewegung:

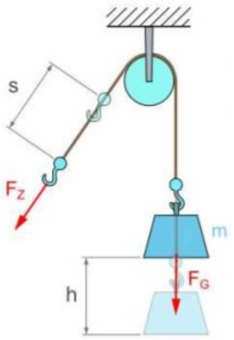
$$W = F * s$$

Bei nicht konstant einwirkender Kraft F:

$$W(x(1) \rightarrow x(2)) = \int F(s)\, ds$$

Die Einheit der Arbeit ist $\frac{kg\, m^2}{s^2} = J$.

Hubarbeit



Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$F_z = F_G$$

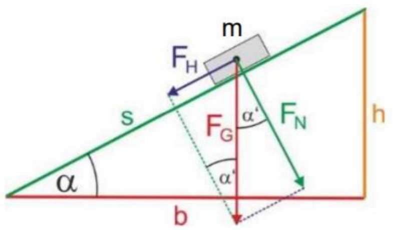
$$s = h$$

$$w_{(0\rightarrow h)} = mgh - mg0 = mgh$$

Beschleunigungsarbeit

Frage: Wie hoch ist der Aufwand eine Masse m von p = 0 auf den Impuls p zu bringen? Dieser Aufwand wird kinetische Energie genannt (vgl. kinetische Energie).

Schiefe Ebene



$$h = s\, sin(\alpha)$$

$$b = s\, cos(\alpha)$$

$$F_H = F_G\, sin(\alpha)$$

$$F_n = F_G \cos(\alpha)$$

Mechanische Leistung

Bei der Berechnung der Arbeit spielt die Zeit keine Rolle. Wenn bei dem Verrichten von Arbeit die Zeit berücksichtigt wird, sprechen wir von mechanischer Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{t}$$

Die Einheit der mechanischen Leistung ist $\frac{kg\, m^2}{s} = \frac{J}{s} = W$.

Die mechanische Leistung lässt sich, bei konstanter Leistung, wie folgt berechnen:

$$W = P * t$$

$$P = \frac{E}{t}$$

In Abhängigkeit der Kraft F, die aufgewendet werden muss und der Geschwindigkeit v der Masse m – bei inkonstanter Leistung:

$$P = F(t) * v(t)$$

Mechanik in drei Dimensionen

Bewegungen im dreidimensionalen Raum werden mit Vektoren bezeichnet. Um den Ort eines Punktes relativ zum Ursprung eines Bezugsystems im dreidimensionalen Raum eindeutig zu bestimmen, benötigen wir drei zueinander „orthogonale" Achsen/angaben. Folgende Koordinatensysteme sollten bekannt sein:

- Kartesische Koordinatensysteme
- Zylindrische Koordinatensysteme
- Polare Koordinatensysteme

Bahnen von Punkten im Verlauf der Zeit t können auch mit Ortsvektoren dargestellt werden – Beispiel Schraube:

$$\vec{r}(t) = \begin{matrix} a\ cos(\omega\ t) \\ b\ sin(\omega\ t) \\ c\ t \end{matrix}$$

Der Betrag – die Länge – eines Vektors wird wie folgt berechnet:

$$\vec{r} = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Geschwindigkeitsvektor

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ ergibt sich durch die Änderung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ in der Zeit t:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist tangential zur Bahnkurve des Punktes orientiert. Am Beispiel der Schraube:

$$\vec{v}(t) = \begin{matrix} -a\ sin(\omega\ t)\ \omega \\ b\ cos(\omega\ t)\ \omega \\ c \end{matrix}$$

Beschleunigungsvektor

Der Beschleunigungsvektor ist analog zu oben die zweite Ableitung des Ortsvektors. Am Beispiel der Schraube:

$$\vec{a}(t) = \begin{matrix} -a\ cos(\omega\ t)\ \omega^2 \\ -b\ sin(\omega\ t)\ \omega^2 \\ 0 \end{matrix}$$

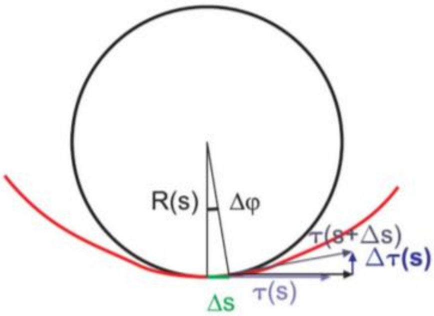
Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit ist eine vektorielle Größe, die angibt wie schnell sich ein Winkel mit der Zeit um eine Achse bewegt. Das Formelzeichen ist ω. Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist $1s^{-1}$ sie lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

Tangentenvektor

Folgende Gegebenheit:



$\vec{\tau}(s) = \frac{\Delta\vec{r}(s)}{\Delta s}$ wobei $|\vec{\tau}(s)| = 1$

Dabei sind:

$\vec{R}(s)$: Radius des Schmiegungskreises

$\vec{n}(s)$: Kurvennormale

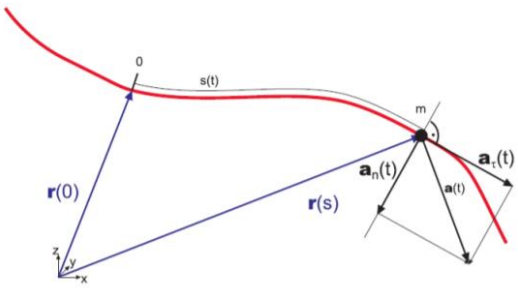
$\vec{\tau}(s)$: Tangente

Den Einheitsvektor $\vec{n}(s)$, der senkrecht auf die Bahn orientiert ist, erhalten wir aus Ableitung von $\vec{\tau}(s)$ mit $|\vec{n}(s)| = 1.$

Der Radius des Schmiegungskreises lässt sich folgendermaßen errechnen:

$$\vec{R}(s) = \frac{1}{\frac{\Delta\vec{\tau}(s)}{\Delta s}}$$

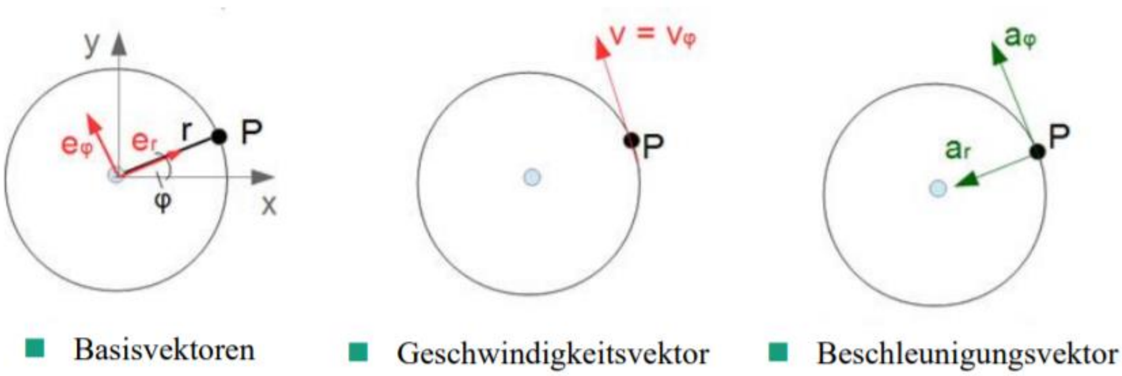
Die Beschleunigung einer Bahn kann in ihre Tangentialkomponente $\vec{\tau}$ und in ihre Radialkomponente $\vec{n}$ zerlegt werden:



$\vec{v}(t) = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$

$\vec{a}\big(s(t)\big) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_\tau\big(s(t)\big)$

Die verschiedenen Vektoren in der Kreisbahn veranschaulicht:



Gravitation

Die Gravitation ist eine der 4 Grundkräfte der Physik. Sie äußert sich in der gegenseitigen Anziehung von Massen. Sie wächst mit größeren Massen und nimmt mit größerer Entfernung ab. Sie lässt sich berechnen:

$$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^3} r_{12} = -F_{12} = F_{21}$$

F_{21} ist die Kraft, die m_1 auf m_2 ausübt. Dabei ist γ die Gravitationskonstante.

Fliehkraft

Die Zentrifugalkraft ist eine Trägheitskraft, die bei Dreh- und Kreisbewegungen auftritt. Die Trägheit eines Körpers verursacht diese:

$$F_z = m * \omega^2 * r = m * a \Rightarrow a = \omega^2 * r$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T}$$

Beschleunigung durch Gravitation

Jeder der beiden Körper erfährt eine Beschleunigung zum anderen hin. Mit Hilfe von Newton:

$$a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \gamma \frac{m_2}{r^2}$$

So folgt, dass die Beschleunigungen indirekt proportional zu den Massen sind:

$$\frac{a_2}{a_1} \sim \frac{m_1}{m_2}$$

Feldvektor

Der Feldvektor $\vec{g}(r)$ eines Gravitationsfeldes gibt die Stärke eines der Gravitation pro Einheitsmasse m_0 an. Dadurch kann das Feld der Masse charakterisiert werden ohne eine zweite Masse zu spezifizieren. $\vec{g}(r)$ ist unabhängig der Testmasse m_0.

$$\vec{F}(r) = -\gamma \frac{mm_0}{r^3} r$$

$$\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m_0} = -\gamma \frac{m}{r^3} r$$

Die Einheit des Feldvektors ist $\frac{m}{s^2}$.

Konservative Kraft – konservatives Vektorfeld

Konservative Kräfte sind Kräfte, die längs eines beliebig geschlossenen Weges keine Arbeit verrichten. Aufgewandte Energie an Teilstrecken wird an anderen wieder zurückgewonnen.

Potentielle Energie eines Gravitationsfeldes

Die potentielle Energie eines Gravitationsfeldes lässt sich wie folgt berechnen:

$$E_{pot} = -\gamma \frac{mm_0}{r} = \vec{\Phi}(r)$$

Gravitationsfeld einer Kugel

Auf den Weg zur Berechnung des Gravitationsfeldes einer Kugel muss zuerst die Masse der Kugel bekannt sein. Eine Kugel mit homogener Dichte ρ und Radius R lässt sich berechnen:

$$m = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$$

Des Weiteren muss unterschieden werden an welchem Punkt das Gravitationsfeld berechnet werden soll:

- Bei r > R: $\vec{g}(r) = -\gamma \frac{m}{r^2}$; $\vec{\Phi} = -\gamma \frac{m}{r}$

- Bei r = R: $\vec{g}(r) = -\gamma \frac{m}{R^2};$ $\quad \vec{\Phi} = -\gamma \frac{m}{R}$
- Bei r <R: $\vec{g}(r) = -\gamma \frac{m}{R^3} r;$ $\quad \vec{\Phi} = -\gamma \frac{m}{R^3} (\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2)$

Schwarze Löcher

Für die Definition schwarzer Löcher vergleichen Sie Vorlesungsfolie 4.30.

Der Ereignishorizont eines Schwarzen Loches lässt sich wie folgt berechnen:

$$r_H = \frac{2\gamma}{c^2} m_{schw.loch}$$

Wobei

$$m_{schw.loch} = \frac{c^2}{2\gamma} r_H$$

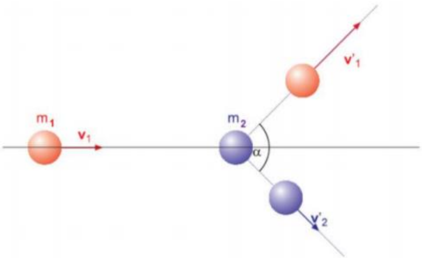
Impulserhaltung im dreidimensionalen Raum

Die Impulserhaltung gilt im Zweidimensionalem wie in Dreidimensionalem. Allgemein lässt sich der Satz folgendermaßen beschreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = \sum_{i=1}^{n} m_i v'_i$$

Ebene Stöße bei ungleichen Massen

Dieser Abschnitt ist erklärungstechnisch nicht vollständig, vergleichen Sie dazu Vorlesungsfolie 4.38.



$m_1 v_1 = m_1 v'_1 m_2 v'_2 \Rightarrow \; v_1 = v'_1 + k\, v'_2$

Bei $m_2 \geq m_1 \Rightarrow m_2 = k * m_1$

$v'_1 v'_2 = |v'_1| * |v'_2| \, cos(\alpha) = \frac{1-k}{2} {v'_2}^2$

Bei gleichschweren Massen (k = 1) ergibt sich α = 90°.

Klassische Relativität

Relativitätsprinzip

Seien x, y, z, t Koordinaten eines Inertialsystems in Raum-Zeit Form und bewegt sich ein System mit x‘, y‘, z‘, t‘ mit u = const. = v relativ dazu, so sind x‘, y‘, z‘, t‘ auch Teil eines Inertialsystems. „Ein Bezugsystem, das sich relativ zu einem Inertialsystem mit v = const. bewegt, ist selbst ein Inertialsystem.

Galilei Transformation

Die Galilei Transformation ist eine Umrechnung physikalischer Aussagen von einem Bezugsystem in ein anderes. Als Beispiel eignet sich besonders das, wobei eine Person in einem fahrenden Zug läuft und von einem Aussenstehendem beobachtet wird. Bei der Transformation sind die Gesetze der klassischen Mechanik unverändert.

Beispiel – freier Fall:

Das Inertialsystem:

$v(t) = (0{,}0, -gt)$
$s(t) = (0{,}0, h - 0{,}5 g t^2)$

Das Laborsystem:

$v'(t) = (-u, 0, -gt)$
$s'(t) = (-ut, 0, h - 0.5gt^2)$

Beschleunigte Bezugssysteme

Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme, in ihnen treten Scheinkräfte auf und das Trägheitsgesetz gilt nicht. Beispiel: Erde.

Corioliskraft

Die Corioliskraft ist die Trägheitskraft, die einen bewegten Körper quer zur Bahnrichtung hin ablenkt.

$$\vec{F}_C = 2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$$

Bahngeschwindigkeit

Die Bahngeschwindigkeit errechnet sich wie folgt, wobei r der Radius der Kreisbewegung ist:

$$v = \omega r$$

Drehimpuls

Der Drehimpuls L ist eine Erhaltungsgröße. Ein System hat einen Drehimpuls, wenn es sich um seinen Masseschwerpunkt dreht. Beispiele dafür sind Kreisel und Planetensysteme. Der Drehimpuls errechnet sich aus dem Vektorenprodukt aus Ortsvektor um Impuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Oder durch Heranziehen des Tangentenvektors:

$$\vec{L} = \vec{\theta} * \vec{\omega}$$

$$\vec{\theta} = \frac{2}{5} m r^2$$

Die Einheit des Drehimpulses ist $\frac{kg\, m^2}{s} = J * s$

Die Rotationsenergie eines rotierenden Körpers lässt sich folgendermaßen berechnen:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \theta \omega^2$$

Ein ausführliches Beispiel finden Sie in den Vorlesungsfolien zu finden bei 5.38.

Spezielle Relativitätstheorie

Dopplereffekt

Der Dopplereffekt ist die zeitliche Stauchung oder Dehnung eines Signals bei Veränderung des Abstandes zwischen Sender und Empfänger. Ursache ist die Veränderung der Laufzeit. Er tritt bei allen Signalen auf, die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit ausbreiten. Als Beispiel: Der Krankenwagen.

Wellenlänge

Die Wellenlänge von Signalen errechnet sich aus der Lichtgeschwindigkeit c und der Frequenz des Signales:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Der Dopplereffekt kann mit einbezogen werden:

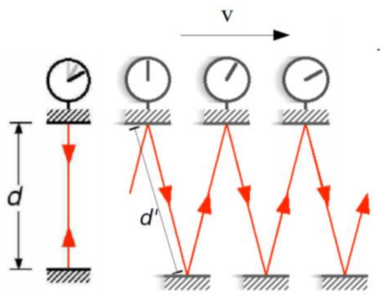
$$\lambda_{Beobachter} = \lambda_{Sender} - \frac{v_{Sender}}{f_{Sender}}$$

$$f_{Beobachter} = \frac{c}{\lambda_{Beobachter}}$$

$$\Rightarrow f_{Beobachter} = \frac{f_{Sender}}{1 - \frac{v_{Sender}}{c}}$$

Zeitdilatation

„Bewegte Uhren gehen langsamer“



$$d' = \sqrt{d^2 + (v\Delta t_{bew})}$$

$$\Delta t_{bew} = \frac{\Delta t_{ruh}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Wie lange eine Sekunde auf dem sich bewegendem Objekt dauert, kann folgendermaßen errechnet werden:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bewegte Maßstäbe sind in Bewegungsrichtung verkürzt:

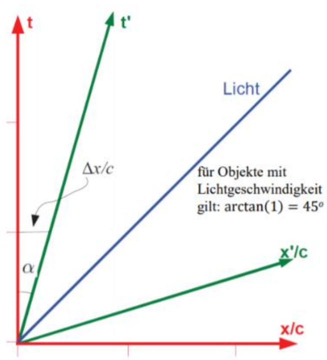
$$L_{bew} = L * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq L$$

Gleichzeitigkeit

Zwei Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden und von einem Inertialsystem aus gleichzeitig stattfinden, finden aus Sicht eines dazu bewegten Beobachters nicht gleichzeitig statt.

Minkowski Diagramm

Sehen Sie sich zur vereinfachten, erweiterten Erklärung folgendes Video an: goo.gl/xLa6wy



$[tan(\alpha) = \frac{v}{c}] < 1$ da sich das betrachtete Objekt sonst schneller/gleich der Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Achsenskalierung

Da Längen und Zeit in bewegten Objekten länger sind, müssen die Achsenabschnitte des sich bewegenden Objekts neu skaliert werden.

Nachdem t = 1s im roten (unbewegten) System vergangen sind, sind

$$t' = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

im grünen (bewegten) System vergangen.
Nachdem T‘ = 1s im grünen System vergangen sind, sind

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Im roten vergangen.
Für die Längenachse gilt:

$$x' = x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Diese Transformation wird Lorentz-Transformation genannt:

Lorentz-Transformation

Von System 1 nach System 2 gilt:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Von System 2 nach System 1 gilt:

$$x = \frac{x^2 + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v^2}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Obige Betrachtung setzt voraus, dass sich die Objekte nur in x-Richtung bewegen, und in y- bzw. z-Richtung konstant bleiben.

Relativistische Massezunahme

Die Masse eines bewegten Körpers ist größer als seine Ruhemasse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Der relativistische Impuls ist demnach:

$$\vec{p} = m * \vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Relativistische Energie

Die relativistische Energie beschreibt sich wie folgt:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + m_0c^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1)$$

Die Gesamtenergie setzt sich dabei aus Ruheenergie und kinetischer Energie zusammen. Einem bewegten Körper kann immer eine Masse m zugeordnet werden und massive Körper besitzen auch in Ruhe eine Energie. Die Gesamtenergie kann auch mit Hilfe des relativistischen Impulses beschrieben werden:

$$mc^2 = \sqrt{{m_0}^2c^4 + p^2c^2}$$

Aus den Formeln sehen wir: Massive Körper können nicht auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden, da sie eine Ruhemasse haben, im Gegensatz zu Lichtteilchen.

Relativistischer Dopplereffekt

Der relativistische Dopplereffekt errechnet sich anders als der klassische den wir bereits kennen:

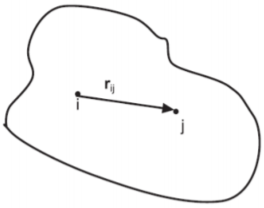
$$f' = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$$ Hierbei entfernt sich der Sender vom Empfänger

$$f' = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$$ Hierbei bewegt sich der Sender auf den Empfänger zu

Mechanik starrer Körper

Starrer Körper

Ein Körper ist starr, wenn r_{ij} für jede Zeit und jede j, i konstant ist:

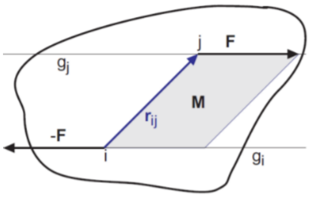


Am starren Körper wirkende Kräfte können in Richtung der Kraft verschoben werden, d.h. der Angriffspunkt der Kraft wird verschoben.

Kräftepaare am starren Körper

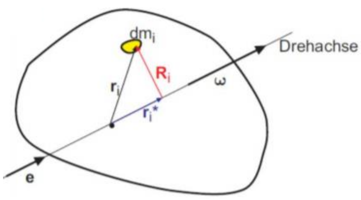
Das Kräftepaar F und -F bewirkt ein Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}$$



Starrer Rotator

Ein starrer Körper, der um eine feste Achse rotiert, wird starrer Körper genannt.



$$v_i = \omega \times r_i = \omega \times R_i$$

Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment I gibt die Trägheit eines starren Körpers gegenüber der Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit an. Das entspricht dem Drehmoment durch die Winkelbeschleunigung.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\Delta m_i {v_i}^2 = \frac{1}{2} I_i \omega^2$$

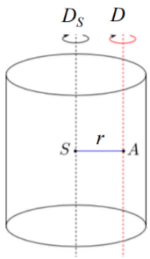
$$I = \sum_j {R_j}^2$$

Beispiele sind auf Vorlesungsfolie 8.10 zu finden.

Steinersche Satz

„Das Trägheitsmoment hängt von dem Ort der Drehachse ab“.

$$I = I_s + mr^2$$



Drehmoment

Das Drehmoment M beschreibt die Drehwirkung einer auf den Körper anliegenden Kraft. Ein Drehmoment kann die Rotation eines Körpers beschleunigen/verringern und den Körper verformen.

Bei auf einen Hebelarm rechtwinklig wirkenden Kraft ergibt sich:

$$M = F * h$$

Der Vektor von M ergibt sich:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Wirkt auf einen starren Körper ein äußeres Drehmoment M, so gilt:

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{1}{I}\vec{M};\ \omega = \frac{\vec{M}t}{I}$$

Kreisel

Ein starrer Körper, der um eine freie Achse rotiert, die nur in einem Punkt P unterstützt wird, wird Kreisel genannt. Ist P gleich dem Masseschwerpunkt wird der Kreisel kräftefrei genannt, sonst „schwerer Kreisel“. Symmetrisch wird er genannt, wenn er zur Drehachse symmetrisch ist.

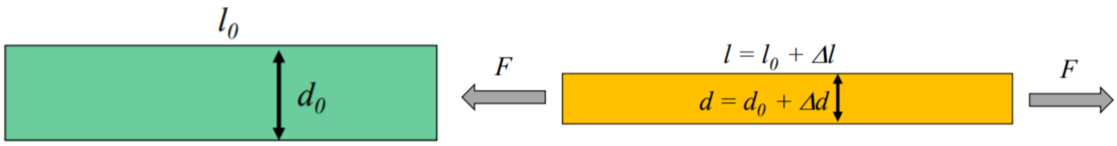
Beispiel: „Kräftefreie Vollkugel“ s. Vorlesungsfolie 8.16.

Mechanik deformierbarer Körper

Poissonzahl

Die Poissonzahl ν ist dimensionslos und dient der Berechnung der Querkontraktion:

$$\nu = -\frac{\Delta d * l_0}{\Delta l * d_0}$$



Die relative Volumenänderung $\frac{\Delta v}{v_0}$ berechnet sich bei eindimensionaler Belastung mithilfe der Poissonzahl:

$$\frac{\Delta v}{v_0} = (1 - 2\nu)\frac{\Delta l}{l_0}$$

Stress and Strain

Der Stress σ „Spannung“ ist die Kraft, die auf einen deformierbaren Körper wirkt:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Der Strain ε „Dehnung“ ist die Änderung der Länge l_0 eines deformierbaren Körpers:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Die Einheit ist $\frac{kg\, m^3}{s^2} = Nm^2$.

Das Youngsche Modul

Das Youngsche Modul E ist der Gradient der Funktion $\sigma(\varepsilon)$.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F}{\varepsilon A} = \frac{l_0 F}{(l - l_0)A}$$

Die Einheit des Modules ist wiederum Nm^2.

Formen der eindimensionalen Dehnung

Spannung durch F: $\varepsilon = \frac{F}{A}$

Dehnung: $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$

Spannung: $\sigma = E\varepsilon$ (E ist hier das Elastizitätsmodul!)

Kraft durch Umformung und Einsetzen: $F = E\frac{l - l_0}{l_0}A$

Hooksche Gesetz

„Das war der mit den Federn“

$F = D * \Delta l$ – D ist hier die Federkonstante.

$\Rightarrow D = \frac{F}{\Delta l}$

Potentielle Energie in einer Feder

Die potentielle Energie einer Feder kann berechnet werden:

$$E_{pot} = -\int_0^x F\,dx = -\int_0^x (-Dx)\,dx = \frac{1}{2}Dx^2$$

Allgemein:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}Ds^2$$

Freiheitsgrade einer allgemeinen dreidimensionalen Beschreibung

Ein Würfel hat sechs Seiten mit jeweils 3 unabhängig möglichen Kräften und 3 unabhängige Deformationen (Kompression, Dilatation, Scherung). Kräfte auf gegenüberliegenden Seiten sind gegengleich, wenn keine Nettokraft wirkt.

Es wird ein Tensor vierter Stufe benötigt: Elastizitätstensor $\tilde{C}$

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sum_l E_{i,j,k,l} * \varepsilon_{k,l}$$

Dabei entsprechen i, j, k, l den x, y, z Ebenen.

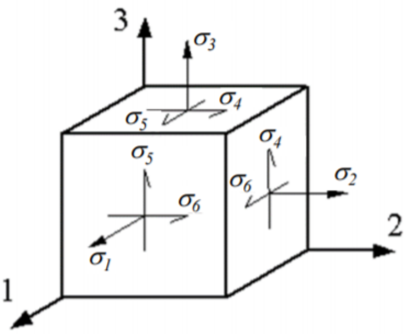
Die Tensorberechnung läuft wie folgt ab:

$$\sigma_{i,j} = \sum_k \sum_l \tilde{C}_{i,j,k,l} * \varepsilon_{k,l}$$

Dabei sind i, j, k, l = 1, 2, 3
(s. Vorlesungsfolie 10.23)

Aufgrund der Symmetrie kann die Matrixgleichnug halbiert werden:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}$$



Rechnen mit Tensoren

Folgendes Schema erklärt die Tensormultiplikation:

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} = \begin{matrix} d1 & d2 & d3 \\ d4 & d5 & d6 \\ d7 & d8 & d9 \end{matrix} \times \begin{matrix} e1 \\ e2 \\ e3 \end{matrix} = \begin{matrix} d1 * e1 + d4 * e2 + d7 * e3 \\ d2 * e1 + d5 * e2 + d8 * e3 \\ d3 * e1 + d6 * e2 + d8 * e3 \end{matrix}$$

Kompressionsmodul

Ausübung eines Druckes auf alle Flächen des Würfels:

$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow \Delta p = \frac{F}{A}$ (Erhöhung des Druckes im Inneren des Körpers)

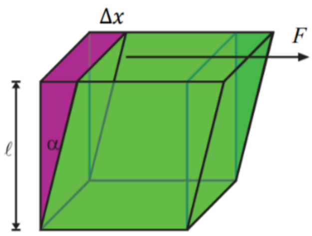
Der Zusammenhang zwischen Druckdifferenz und Volumenkompression wird durch das Kompressionsmodul k ausgedrückt:

$$k = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta v}{v_0}}$$

Die Druckerhöhung führt zu einer Volumenminderung.

Schubmodul und Schubspannung

Das Schubmodul gibt Auskunft über die linear-elastische Verformung eines Bauteils infolge einer Scherkraft oder Schubspannung.

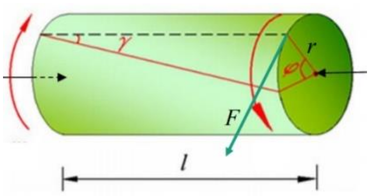


$tan(\alpha) = \frac{\Delta x}{l}$ (für kleine Scherwinkel)

$\tau = G * \alpha$ (G = Schubmodul)

$$\tau = \frac{F}{A}$$

Schubmodul bei Torsionsspannung

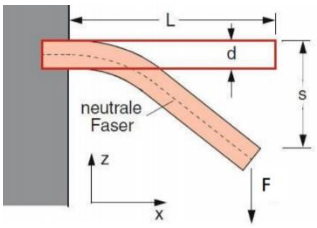


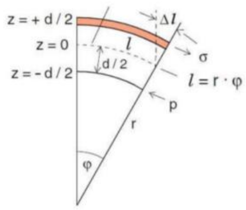
$\gamma \approx r\frac{\varphi}{l}$ (für kleine Scherwinkel)

$$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = Gr\frac{\varphi}{l}$$

Biegung eines einseitig eingespannten Balkens

Lokal kann die Verbiegung des Balkens durch einen Kreisbogen beschrieben werden (vgl. Vorlesungsfolie 10.35).





$$\Delta l \approx z\varphi \approx z\frac{l}{r} \Rightarrow \frac{\Delta l}{r} = \frac{z}{r}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow \sigma = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{z}{r}$$

Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit ist ein Stoff, der leicht in seiner Form zu verändern ist, der aber einer Volumenänderung großen Widerstand entgegensetzt.

Gas

Als Gas wird Materie bezeichnet, die keine bestimmte Form hat und jeden Raum, in den sie gebracht wird, ausfüllt. Gas setzt Form- und Volumenänderung keinen Widerstand entgegen.

Ideales Gas

Unter einem idealen Gas verstehen wir ein Gas mit folgenden Eigenschaften:

- Gasteilchen sind kugelförmig und nicht verformbar
- Stöße zwischen Teilchen sind elastisch, sodass keine Energie verloren geht

- Der Raum, in dem sich Gas ausbreiten kann ist unendlich groß
- Der Durchmesser der Teilchen ist kleiner als die mittlere freie Weglänge
- Die Teilchen haben keine Wechselwirkungen miteinander

Gasgesetze

Gay-Lussac V ~ T

„Volumen erhöht sich bei Temperaturerhöhung"

Amontons p~T

„Druck erhöht sich bei Temperaturerhöhung"

Boyle-Mariotte p~1/V

„Druck steigt bei verringerndem Volumen exponentiell an"

Allgemeine Gasgleichung

Folgende Gesetzmäßigkeiten ergeben sich beim Gas:

$$\frac{pV}{T} = const.$$

$$\Rightarrow \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

Zuhilfenahme von Avogadro – „Gleiche Volumina idealer Gase mit identischem Druck und Temperatur haben auch dieselbe Anzahl an Molekülen":

$$\frac{pV}{T} = nR$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

Die innere Energie eines Gases kann berechnet werden:

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

Es existieren eine Reihe von Gaskonstanten, die Sie in der Vorlesungsfolie 11.18 nachlesen können.

Reales Gas

Reale Gase weichen von der Linearität der Zusammenhänge von Druck, Gas und Volumen des idealen Gases ab, durch die endliche Ausdehnung des Gases und durch Wechselwirkungen zwischen den Teilchen.

Van-der-Vaals-Gleichung

Mit der Van-der-Vaals-Gleichung kann das Verhalten eines realen Gases realitätsgenauer beschrieben werden:

$$p_{vw} = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V2}$$

Hierbei sind a der Kohäsionsdruck und b das Kovolumen, die bei jedem Gas unterschiedlich sind. Unter Kohäsionsdruck verstehen wir die Anziehungskräfte der Teilchen untereinander und unter Kovolumen die Größe eines einzelnen Teilchens.

Die innere Energie durch die Van-der-Vaals-Gleichung:

$$U_{vw} = \frac{3}{2}nRT - \frac{n^2a}{V^2}$$

Gasprozesse

Isochor: p/T konstant

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Es wird keine Arbeit verrichtet, aber die innere Energie ändert sich:

$$\Delta U = c_v m(T_2 - T_1) = c_v m T_1 (\frac{T_2}{T_1} - 1) = c_v m T_1 (\frac{p_2}{p_1} - 1)$$

Wobei c_v die spezifische Wärmekapazität darstellt und m die Gasmasse. Der Wärmeumsatz kann wie folgt berechnet werden:

$$Q = \Delta U = c_v m(T_2 - T_1)$$

Isobar: V/T konstant

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$W = -(pV_2 - pV_1) = -nR\Delta T = -p(V_2 - V_1)$$

Unter isobaren Verhältnissen muss mehr Wärmeenergie zugeführt werden, da ein Teil als Arbeit in die Volumenänderung verwendet wird. Sind T_1 und T_2 bekannt, kann ΔU errechnet werden:

$$\Delta U = c_v m(T_2 - T_1)$$

Da $W = -p(V_2 - V_1)$:

$$W = -(pV_2 - pV_1) = -(nRT_2 - nRT_1) = -nR(T_2 - T1 \quad)$$

Die umgesetzte Wärmeenergie errechnet sich folgendermaßen:

$$Q = \Delta U - W = (c_v + R_s)m(T_2 - T_1) = c_p m(T_2 - T_1)$$

Isotherm: pV konstant

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

Da F = const.: $\Delta U = 0$

Volumenänderungsarbeit: $W_v = nRT * ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$

Bei isothermen Prozessen mit Volumen und Druckänderung muss gekühlt werden:

$$Q = -W_v$$

Kompression von Gas

Es muss eine Arbeit W verrichtet werden, um Gas von V_1 auf V_2 zu komprimieren:

$$W_v = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT * ln(\frac{V_1}{V_2})$$

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik sagt folgendes aus: „Zugeführte Wärmeenergie + Arbeitsumsätze = Änderung der inneren Energie“

$$Q + W = \Delta U$$